Integrales de funciones trigonometricas

a) Para el calculo de integrales de la forma:

$$\boxed{\int \sin^n x\,dx \;\; ; \;\; \int \cos^n x\,dx}$$

Caso I. Cuando $\boldsymbol{n}$ *es un entero positivo* ***par****, se procede con las identidades:*

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \;\; ; \;\; \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)}$$

Caso II. Cuando $\boldsymbol{n}$ *es un entero positivo* ***impar*** *se expresan las integrales como:*

$$\boxed{\begin{aligned}\int \sin^n x\,dx &= \int \sin^{n-1} x \cos x\,dx \\ \int \cos^n x\,dx &= \int \cos^{n-1} x \cos x\,dx\end{aligned}}$$

Luego se usa la identidad: $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

b) Para el calculo de integrales de la forma:

$$\boxed{\int \tan^n x\,dx\ ;\ \int \cot^n x\,dx}$$

Caso I. si ***n*** *es un numero entero positivo* ***par*** *las integrales se expresaran:*

$$\boxed{\begin{aligned}\int \tan^n x\,dx &= \int \tan^{n-2} x \tan^2 x\,dx \\ \int \cot^n x\,dx &= \int \cot^{n-2} x \cot^2 x\,dx\end{aligned}}$$

Caso II. si ***n*** *es un numero entero positivo* ***impar*** *las integrales se expresaran:*

$$\boxed{\begin{aligned}\int \tan^n x\,dx &= \int \tan^{n-1} x \tan x\,dx = \int [\tan^2 x]^{\frac{n-1}{2}} \tan x\,dx \\ \int \cot^n x\,dx &= \int \cot^{n-1} x \cot x\,dx = \int [\cot^2 x]^{\frac{n-1}{2}} \cot x\,dx\end{aligned}}$$

Luego se usan las identidades:

$$\boxed{1+\tan^2 x = \sec^2 x\ \ ;\ 1+\cot^2 x = \csc^2 x}\ \ (\textit{para ambos casos})$$

c) Para el calculo de integrales de la forma:

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

Caso I. Si ***m*** *o* ***n*** *es un numero positivo* ***impar*** *y el otro es cualquier numero entonces:*

1.1 *Suponiendo que* ***m*** *es un numero positvo* ***impar*** *y* ***n cualquier numero*** *entonces la integral se expresa de la forma:*

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^{m-1} x \cos^n x \sin x \, dx$$

Luego se usa la identidad: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

1.2 *Suponiendo que* ***n*** *es un numero positivo* ***impar*** *y* ***m cualquier numero*** *entonces la integral se expresa de la forma:*

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^m x \cos^{n-1} x \cos x \, dx$$

Luego se usa la identidad: $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

Caso II. Si $\boldsymbol{m}$ *y* $\boldsymbol{n}$ *son numeros enteros positivos* ***pares****, se usan las identidades*:

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \ ; \ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)}$$

d) Para el calculo de integrales de la forma:

$$\boxed{\int \tan^n x \sec^m x \, dx \ ; \int \cot^n x \csc^m x \, dx}$$

Caso I. Cuando $\boldsymbol{n}$ *es un numero positivo* ***impar*** *y* ***m cualquier numero***

entonces las integrales se expresan de la forma:

$$\boxed{\begin{aligned} \int \tan^n x \sec^m x \, dx &= \int \tan^{n-1} x \sec^{m-1} x \tan x \sec x \, dx \\ \int \cot^n x \csc^m x \, dx &= \int \cot^{n-1} x \csc^{m-1} x \cot x \csc x \, dx \end{aligned}}$$

Luego se usan las identidades:

$$\boxed{1 + \tan^2 x = \sec^2 x \ ; \ 1 + \cot^2 x = \csc^2 x}$$

Caso II. *Cuando* **m** *es un numero entero positivo* ***par*** *y* ***n cualquier numero*** *entonces las integrales se expresan de la forma*:

$$\int \tan^n x \sec^m x\, dx = \int \tan^n x \sec^{m-2} x \sec^2 x\, dx$$
$$\int \cot^n x \csc^m x\, dx = \int \cot^n x \csc^{m-2} x \csc^2 x\, dx$$

Luego se usan las identidades:

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \;\; ; \;\; 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

e) Para el calculo de integrales de la forma:

$$\int \sin(mx)\cos(nx)\, dx \;\; ; \int \sin(mx)\sin(nx)\, dx \;\; ; \int \cos(mx)\cos(nx)\, dx$$

Se utilizan las formulas:

$$\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$